

Cap. 6. Ondas de matéria

Nos 10 anos que se seguiram ao estabelecimento do modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio houve pouco progresso na construção de uma teoria completa que justificasse seu sucesso ou que tivesse aplicações satisfatória a átomos de muitos elétrons. Então, em 1923-1924 um estudante de doutorado francês, Louis de Broglie, propôs uma ideia que trouxe uma nova compreensão do modelo de Bohr e constituiu-se num passo fundamental para o desenvolvimento da mecânica quântica moderna.

Num raciocínio que envolve a expectativa de que a natureza seja simétrica, de Broglie propôs que objetos materiais tais como o elétron, um átomo ou uma bola de futebol exibissem, tal como a luz, um caráter dual onda-partícula. Não havia, na ocasião, nenhuma evidência que sustentasse um caráter ondulatório para estes objetos. No entanto, de Broglie mostrou que, se supusermos que elétrons podem se comportar como ondas, as órbitas estacionárias de Bohr podem ser explicadas como ondas estacionárias no interior do átomo de hidrogênio. Estas ondas, cuja natureza só foi melhor esclarecida 2 ou 3 anos depois, foram chamadas de

"ondas de matéria".

A ideia de de Broglie de que a dualidade onda-partícula se aplica tanto a fótons quanto a elétrons foi retomada por outros físicos, entre eles o austríaco Erwin Schrödinger, que publicou em 1926 quatro artigos que marcam o nascimento da mecânica quântica, então chamada mecânica ondulatória. Em 1927, a observação de padrões de interferência produzidos por elétrons constituiu-se numa verificação experimental direta das ondas de matéria de de Broglie.

6.2 A hipótese de de Broglie

Vimos no cap. 4 que fótons exibem propriedades tanto de ondas (em sua propagação) quanto de partículas (em sua interação com a matéria) e que estes dois tipos de propriedades estão relacionados pelas equações

$$E = hf \quad \text{e} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

De Broglie propõe que partículas materiais devam apresentar um caráter dual semelhante, sem precisar a natureza das ondas de matéria que propunha, e que a conexão entre estas propriedades seja dada pelas equações acima - chamadas, neste contexto, de relações de de Broglie.

Podemos ver, em retrospecto, que as ondas de matéria para o elétron sugerem uma explicação plausível para a quantização dos níveis de energia atômicos. Se aceitarmos como verdadeiras as relações de de Broglie, a quantização da energia do elétron E é equivalente à quantização da frequência de sua onda de matéria. Por outro lado, ondas clássicas confinadas numa região do espaço (ondas sonoras em tubos, ondas numa corda esticada) só podem vibrar com um conjunto discreto de frequências. Isto sugere a ideia de que a quantização dos níveis de energia atômicos possa ~~ser~~ ser explicada ~~por~~ pela quantização das frequências das ondas do elétron confinadas no interior do átomo.

de Broglie aplicou esta ideia imaginando a onda do elétron vibrando ao longo de uma órbita de Bohr. Esta onda só pode se ajustar à órbita que a suporta se o perímetro desta órbita for um múltiplo inteiro do comprimento de onda,

$$2\pi r = n\lambda, \quad n=1,2,3,\dots$$

$$= n \frac{h}{p}$$

$$\Rightarrow rp = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \Rightarrow L = n\hbar, \text{ que é a condição de quantização de Bohr.}$$

Vale enfatizar que esta explicação da quantização do momento angular não é, hoje, considerada satisfatória. Entre outros senões, ela se vale da ideia de algum tipo de onda unidimensional obrigada a se estabelecer sobre um trajeto circular de raio r bem definido, enquanto a mecânica quântica moderna considera uma onda tri-dimensional espalhada no entorno do átomo - como uma onda acústica reverberando no interior de uma ^{caixa} câmara de ressonância.

No entanto, a ideia central de que a quantização do momento angular possa ser explicada pela noção de ondas de matéria para o elétron satisfazendo as relações de de Broglie está absolutamente correta.

6.3 Verificação experimental

A dificuldade de evidenciar a natureza ondulatória de objetos materiais está associada - assim como no caso dos raios X - ao ~~seu~~ seu comprimento de onda ser muito pequeno. A tabela abaixo mostra comprimentos de onda obtidos pelas relações de de Broglie para um elétron com diferentes energias cinéticas.

$K(\text{eV})$	10	100	1.000	10.000
$\lambda(\text{nm})$	0,39	0,12	0,039	0,012

Como o comprimento de onda dos elétrons na faixa 100 - 1000 eV é comparável a de raios X observados por difração de Bragg, poder-se-ia sugerir o uso desta técnica para ~~ex~~ evidenciar o comportamento dual. Isto é, no entanto, dificultado pela grande seção de choque de espalhamento de elétrons de baixa energia pelo gás remanescente em tubos de descarga. Torna-se necessária a obtenção de alto vácuo, o que foi conseguido pelos americanos Clinton Davison e Lester Germer que, em 1927, obtiveram figuras de difração produzidas por elétrons de 54 eV incidentes num cristal de níquel.

Hoje aceitamos como um fato que uma partícula material tenha propriedades ondulatórias como previsto pelas relações de de Broglie, e estas propriedades têm muitas aplicações:

- o pequeno comprimento de onda do elétron é explorado no microscópio eletrônico, que usa elétrons com energias tipicamente entre 50 e 500 keV
- difração de elétrons de baixa energia ($\sim 100 \text{ eV}$) é usada como sonda da

11

estrutura de sólidos; por não penetrarem tanto na matéria quanto raios X de comprimento de onda comparável, podem ser usadas para estudar propriedades da superfície de sólidos, que são importantes em eletrônica e dispositivos catalíticos, numa técnica experimental de acrónio LEED (low-energy electron diffraction)

- difrações de neutrons de energia da ordem de 10^{-2} eV é outra sonda importante da estrutura de sólidos, usada pelo neutron estar sujeito a ~~forças~~ ~~eletrônicas~~ interação nuclear com o próton no estudo de cristais contendo hidrogenio.

6.4 A função de onda quântica

A função de onda é a função matemática que especifica a perturbação provocada em cada ponto do espaço e em cada instante.

Ondas (unidimensionais) sobre uma corda esticada na direção x são descritas por uma função $y(x, t)$ que especifica o deslocamento transversal do ponto de coordenada x da corda no instante t . Em ondas sonoras, a função de onda é a diferença de pressão p provocada pela propagação, que vai depender no caso geral das 3 coordenadas espaciais

e do tempo, $\phi(x, y, z, t)$.

Em ondas luminosas, esta função é a intensidade do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

De Broglie não tinha uma ideia clara sobre o que as ondas de matéria eram na realidade. A interpretação hoje aceita foi proposta pelo alemão Max Born em 1926. Suas ideias foram aceitas e extendidas por Bohr e seus colaboradores e foi rotulada de interpretação de Copenhague. A característica mais fundamental desta interpretação é que a função de onda especifica apenas probabilidades de se medir valores específicos das grandezas físicas associadas a uma partícula.

Para entender esta interpretação é útil considerar a conexão entre a função de onda EM $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e o fóton.

A energia E associada à onda EM e contida num volume ΔV centrado na posição $\vec{r}$ e no instante t é

$$E(\Delta V \text{ em } \vec{r}) = \epsilon_0 [\vec{E}(\vec{r}, t)]^2 \Delta V, \text{ ou}$$

$$E(dV \text{ em } \vec{r}) \propto [\vec{E}(\vec{r}, t)]^2 dV$$

De um ponto de vista quântico, a energia associada a uma onda EM é transportada por fótons discretos.

Se, por simplicidade, considerarmos uma onda com frequência fixa f (monocromática), cada fóton terá energia hf . A quantidade de fótons no volume dV ao redor de $\vec{r}$ é

$$N(dV \text{ em } \vec{r}) = \frac{E(dV \text{ em } \vec{r})}{hf} \propto [\vec{E}(\vec{r}, t)]^2 dV$$

Como o quadrado de uma função de onda é muitas vezes chamado de intensidade, podemos descrever a equação acima afirmando que o número de fótons em um pequeno volume dV é proporcional à intensidade $[\vec{E}(\vec{r}, t)]^2$ da luz.

A equação acima não pode ser exatamente verdadeira, já que poderia prever um número fracionário de fótons. Ela deve ser entendida como determinando o número provável de fótons em dV , ou o valor médio deste número em várias realizações da contagem de fótons.

Born propõe que uma relação similar deva se aplicar a qualquer função de onda (onda de matéria), como a do elétron:

$$\text{número médio de elétrons dentro de } dV \text{ em } \vec{r} \propto [\psi(\vec{r}, t)]^2 dV$$

Ψ representa a função de onda do elétron.

Uma pequena, mas importante, dificuldade no caso das ondas de matéria é que a função de onda tem 2 partes, que podem ser expressas de forma conveniente com o uso dos números complexos:

$$\Psi(x) = \Psi_{\text{real}}(x) + i \Psi_{\text{imag}}(x)$$

Esta característica é vital para a explicação moderna das órbitas estacionárias de Bohr. Como Ψ é complexa,

$$\langle N(dV \text{ em } \vec{r}) \rangle \propto |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV,$$

$$|\Psi| = (\Psi_r^2 + \Psi_i^2)^{1/2}$$

$|\Psi|^2$ é a intensidade da função de onda.

Na experiência da dupla fenda com partículas (elétrons, por exemplo) é importante ressaltar que o padrão de interferência é gerado mesmo com feixes de intensidade infinitesimal: cada elétron individual é descrito por uma função de onda quântica, e o padrão de interferência é observado mesmo que, em cada instante, apenas 1 elétron esteja trafegando entre as fendas e o detector.

Então, associamos a cada partícula quântica individual uma função de

onda $\Psi(\vec{r}, t)$ cuja intensidade em cada posição $\vec{r}$ determina a probabilidade de encontrar a partícula numa região dV centrada em $\vec{r}$ no instante t :

$$\text{Prob}(dV \text{ em } \vec{r}) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV,$$

onde escolhe-mos a escala (dimensão) de Ψ para que valha o sinal de igualdade. A intensidade $|\Psi|^2$ é portanto uma densidade de probabilidade:

$$P(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2.$$

Significado da probabilidade: frequência relativa da ocorrência do evento numa coleção de medidas feitas em sistemas descritos por funções de onda idênticas é um aproximante da probabilidade de ocorrência do evento.

Caráter probabilístico da MQ: a função de onda Ψ contém toda a informação possível sobre um sistema quântico, e sua intensidade é a densidade de probabilidade: o resultado de uma experiência isolada é impossível ser previsto.

Exemplo: a MQ nos permite calcular a probabilidade de que um fóton de raios X seja espalhado por um elétron no efeito Compton, ou de que um fotoelétron seja ejetado do catodo

no efeito fotoelétrico - de forma similar (mas não idêntica) a determinação probabilística da determinação do resultado do lançamento de uma moeda (cara ou coroa).

6.5 Por qual fenda passa o elétron?

Esta pergunta só faz sentido se fizermos a determinação experimental da passagem do elétron (iluminando-o com luz, por exemplo); mas esta experiência destrói o padrão de interferência! Veja como:

(i) A distância d entre as fendas deve ser da ordem do comprimento de onda do elétron, $\lambda_e \approx d \Rightarrow p_e = \frac{h}{\lambda_e} \approx \frac{h}{d}$

(ii) Para que a luz refletida pelo elétron identifique por que fenda ele passou, seu comprimento de onda λ_γ (da luz) deve ser menor que a distância entre as fendas, $\lambda_\gamma \leq d$

$$\Rightarrow p_\gamma = \frac{h}{\lambda_\gamma} \gtrsim \frac{h}{d}$$

(iii) Logo, o momento do fóton usado na observação p_γ deve ser pelo menos da ordem do momento do elétron observado, $p_\gamma \gtrsim p_e$: uma única colisão com o fóton é suficiente para mudar, completa e aleatoriamente, o momento do elétron.

Na MQ podemos fazer afirmações precisas (e determinísticas) a respeito da densidade de probabilidade de encontrar o elétron numa posição, mas não podemos prever deterministicamente em que posição o encontraremos num dado instante - e esta impossibilidade de nós é devida a deficiências técnicas ou falta de conhecimento, é uma questão de princípio.

6.6 Ondas senoidais

Uma onda com frequência e comprimento de onda bem definidos é chamada senoidal, ou harmônica. Uma onda harmônica é uma idealização que nunca ocorre na prática. No entanto, muitas ondas reais são bem aproximadas por ondas senoidais, e qualquer onda pode ser construída como uma soma de ondas harmônicas.

A função de onda para uma onda harmônica que se propaga no sentido x positivo sobre uma corda esticada tem a forma

$$y(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = A \sin(kx - \omega t),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

6.7 Pacotes de onda e análise de Fourier

Uma onda senoidal exata não pode ocorrer: ela teria que ter duração e extensão infinitas. Uma função de onda senoidal pura representaria uma partícula com probabilidade uniforme no espaço e no tempo, o que é absurdo: um elétron num tubo de TV é emitido pelo cátodo no instante $\approx t_0$ e alcança a tela em $\approx t_1$; num instante intermediário o elétron não tem posição bem definida - caráter ondulatório - mas só tem densidade de probabilidade finita numa região pequena comparada com o tamanho do tubo. Este tipo de função de onda, localizada no interior de uma região finita, é chamado de pacote, ou pulso, de onda.

Vamos descrever as propriedades matemáticas de pacotes de onda localizados. Eles podem ser construídos pela superposição de muitas ondas senoidais diferentes. O estudo da composição de funções como somas de ondas senoidais é chamado de análise de Fourier.

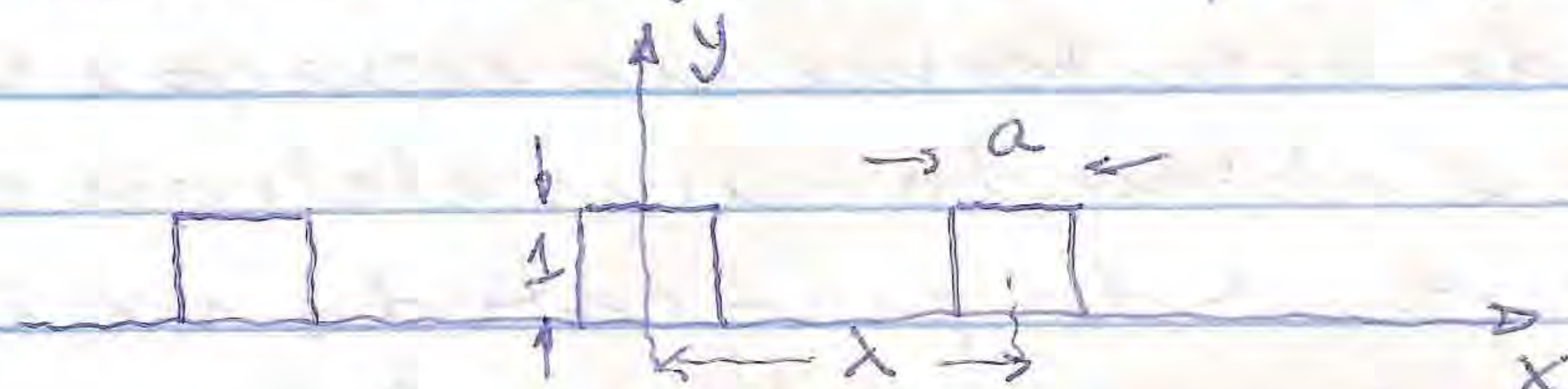
O resultado central da análise de Fourier é que qualquer função (não patológica) pode ser escrita como uma soma de senos e cossenos. Vamos considerar duas classes de funções:

(i) funções periódicas

(ii) funções não periódicas

Série de Fourier

Um exemplo do tipo (i):



Esta é uma função par ($f(x) = f(-x)$) e pode ser expressa como uma soma de cossenos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x),$$

uma série de Fourier (os A_n são os coeficientes de Fourier). O termo $n=0$ é uma constante, e os subsequentes tem comprimentos de onda $\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}, m, \frac{\lambda}{n}, m$

O termo de maior comprimento de onda ($n=1$) é chamado de fundamental, os outros de harmônicos superiores. Seus números de onda são

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad k_2 = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 2k_1, m, \quad k_n = n k_1, m, \\ k_{n+1} - k_n = \Delta k = 2\pi/\lambda.$$

Para obter os coeficientes de Fourier usaremos resultados conhecidos da trigonometria e da integração de funções trigonométricas.

$$(i) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$(ii) \int_0^\lambda \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \frac{\lambda}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{\lambda} \right]_0^\lambda = 0, \quad n \neq 0$$

$$= \lambda, \quad n = 0$$

Para usar estes resultados a nosso favor, seguiremos o procedimento:

1. Determinação de A_0 :

$$\int_0^\lambda f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^\lambda \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx =$$

$$= A_0 \lambda$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) dx //$$

2. Determinação de A_n ($n \neq 0$):

$$\int_0^\lambda f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \underbrace{\int_0^\lambda \cos \frac{m\pi x}{\lambda} \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx}_I$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_0^\lambda \cos \frac{(m+n)\pi x}{\lambda} dx + \int_0^\lambda \cos \frac{(m-n)\pi x}{\lambda} dx \right]$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2} \lambda, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^\lambda f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx = \frac{1}{2} A_n \lambda //$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos \frac{n\pi x}{\lambda} dx //$$

No exemplo em questão,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, & a/2 \leq x < (\lambda - a/2) \\ 1, & \lambda - \frac{a}{2} \leq x \leq \lambda \end{cases}$$

Logo,

$$1. \quad A_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot a$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A_n &= \frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi n} \left(\left[\sin \frac{2\pi n}{\lambda} x \right]_0^{a/2} + \left[\sin \frac{2\pi n}{\lambda} x \right]_{\lambda - a/2}^{\lambda} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi n} \left\{ \sin \frac{\pi n a}{\lambda} + \sin \left[\frac{2\pi n}{\lambda} \left(\lambda - \frac{a}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2\pi n - \frac{\pi n a}{\lambda}} \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{\lambda} \end{aligned}$$

Integral de Fourier

Uma função não periódica pode ser interpretada como o limite de uma função periódica quando a distância de repetição (λ , no exemplo acima) vai a infinito. A separação entre dois números de onda consecutivos na série de Fourier $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda}$ diminui, e, no limite, o conjunto dos k 's - que era discreto - se torna contínuo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x)$$

$$f(x) = \int A(k) \cos(kx) dk$$

A função $A(k)$ é chamada de transformada de Fourier de $f(x)$; ela dá a distribuição e a contribuição dos números de onda k na formação do pacote de onda.

Vamos mostrar que, se $f(x)$ é um pacote com largura Δx , ele é formado de uma ~~certa~~ faixa de números de onda Δk tal que $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$ (tem ordem de grandeza um). O valor exato depende da definição precisa das larguras Δx e Δk . A mensagem contida neste resultado é: para se ter um pacote de ondas estreito (Δx pequeno) precisamos de um grande número de números de onda (ou uma faixa larga de comprimentos de onda, Δk grande).

Para isso, vamos montar um pacote de ondas par ($f(x) = f(-x)$), ~~isto~~ composto por uma superposição de cossenos, centrado na origem e consistindo de comprimentos de onda na faixa $(\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Vamos focalizar a atenção em apenas 2 termos da superposição, cossenos com comprimento de onda $\lambda - \Delta\lambda$ e $\lambda + \Delta\lambda$, nos extremos da faixa, com comprimentos de onda que diferem por $2\Delta\lambda$. Estes 2 termos em cossenos estão em fase perto da origem, e sua defasagem

cresce à medida que nos afastamos de $x=0$. O 1º pico à direita de $x=0$ ocorre, para a contribuição ~~xxx~~ com $\lambda - \Delta\lambda$, $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda - \Delta\lambda} x\right)$, quando seu argumento for 2π , em $x = \lambda - \Delta\lambda$ portanto; o da contribuição com $\lambda + \Delta\lambda$ ocorre em $x = \lambda + \Delta\lambda$, e a diferença entre os 2 é de $2\Delta\lambda$. A diferença entre os picos de ordem N será de $N \cdot 2\Delta\lambda$, e as 2 contribuições terão fases opostas e superposição destrutiva quando esta diferença for $2N\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$, na posição aproximada por

$x = N\lambda$. Logo, ~~esta é~~ a metade da largura do pacote de ondas (já que o mesmo raciocínio vale para os picos à esquerda da origem). - vamos rotular esta metade da largura do pacote de Δx . Temos então:

$$\begin{cases} 2N\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2} \\ N\lambda \approx 2\Delta x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2\Delta x}$$

Outra forma de obter este resultado: queremos saber a posição x em que a superposição dos cossenos é destrutiva:

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda - \Delta\lambda} x + \cos \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} x = 0$$

Isto acontece quando seus argumentos diferem de π :

$$\frac{2\pi}{\lambda - \Delta\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} x = 2\pi x \frac{\lambda + \Delta\lambda - (\lambda - \Delta\lambda)}{(\lambda - \Delta\lambda)(\lambda + \Delta\lambda)}$$

$$= \frac{2\pi x}{(\lambda - \Delta\lambda)(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{4\pi x \Delta\lambda}{\lambda^2} \quad (\lambda \gg \Delta\lambda)$$

$$= \pi \Rightarrow \frac{4\Delta x \Delta\lambda}{\lambda^2} = 1 \quad (x = \Delta x \text{ por definição})$$

$$\text{Mas } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow dk = \left| \frac{dk}{d\lambda} \right| d\lambda, \text{ ou}$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

Juntando tudo, temos

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx \frac{\pi}{2}$$

Esta relação pode ser entendida intuitivamente: quanto maior for a faixa de comprimentos de onda, mais rapidamente as diferentes contribuições se defasam quando nos afastamos do centro do pacote de ondas e mais rapidamente este vai a zero.

Uma definição mais precisa das larguras - ou incertezas - Δx e Δk envolve o desvio quadrático médio (mencionado no cap. 3): se x_0 indica o centro do pacote, e o símbolo $\langle \dots \rangle$ indica uma média sobre os valores nele contidos,

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - x_0)^2 \rangle}$$

Com esta definição, a relação acima pode ser provada rigorosamente ser

$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$, forma que usaremos de agora em diante.

Discutimos até agora uma onda como função da posição x num instante t fixado. Podemos também considerar a onda como função de t numa posição x fixada, e os resultados exibem completa analogia com os anteriores:

- um pulso de ondas tomado como função de t pode ser expresso como uma superposição de funções senoidais $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, onde $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, com diferentes valores de T ou ω ;
- a síntese de um pulso localizado no tempo requer uma distribuição contínua $\Delta \omega$ de frequências angulares;
- se Δt é a largura (rms) ~~do~~ temporal do pulso,
$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

Esta desigualdade traz importantes consequências para a transmissão de informações.

Uma onda ^{verdadeiramente} monocromática ($\Delta \omega = 0$) tem duração infinita!

Exemplo: uma imagem na TV (comum) é composta por 525 linhas horizontais, varridas 30 vezes por segundo. Qual é a faixa de frequências Δf na qual um transmissor de TV deve operar para que as resoluções vertical e horizontal sejam aproximadamente iguais?

A questão é determinar a duração de um pulso de informações.

Cada linha horizontal é varrida em $\frac{1}{30 \times 525} \text{ s} = 6,3 \times 10^{-5} \text{ s}$.

A resolução vertical é $\frac{1}{525}$ da altura da tela; logo, a resolução horizontal deve ser a mesma, e devem haver 525 pulsos numa linha horizontal. A duração de cada um ($2\Delta t$ - porque o fator 2?) deve ser

$$2\Delta t \approx \frac{1}{525} \times 6,3 \times 10^{-5} \text{ s} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ s},$$

o que requer $\Delta \omega \geq \frac{1}{2\Delta t} \approx 8,3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$,

$$\text{ou } \Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \geq 1,3 \times 10^6 \text{ Hz}$$

A largura da faixa de frequências (largura de banda) necessária é, portanto

$$2\Delta f \geq 2,6 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

Como comparação, sistemas de áudio de alta fidelidade necessitam uma

largura de banda de $4 \times 10^4 \text{ Hz}$ (o ouvido humano ouve sons entre 20 e $2 \times 10^4 \text{ Hz}$) para uma reprodução fiel de frequências audíveis. Esta diferença - 2 ordens de grandeza - foi a principal dificuldade tecnológica a ser vencida no desenvolvimento de gravadores de vídeo.

6.8 A relação de incerteza para posição e momento

A função de onda de uma partícula se estende ao longo de um intervalo espacial. Portanto, a posição de uma partícula é incerta por uma quantidade $\pm \Delta x$. Na interpretação de Copenhague, isto não é apenas reflexo de nossa ignorância a respeito da posição da partícula, mas sim de que a partícula de fato não tem uma posição bem definida. Esta incerteza é inerente à natureza, e não apenas ao cérebro do físico. A incerteza Δx pode ser menor em certos estados do que em outros; mas qualquer que seja o estado, especificado pela função de onda $\psi(x,t)$, existirá um intervalo não nulo dentro do qual a partícula pode ser encontrada, e sua posição não pode ser definida de forma mais precisa que esta.

Vimos na seção anterior que a função de onda que descreve uma partícula pode ser construída pela superposição de ondas senoidais, mas que isto requer a contribuição de uma faixa (contínua) de números de onda k (ou comprimentos de onda λ). A relação de de Broglie faz com que isto

implique numa incerteza no momento da partícula:

$$\phi = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \hbar \Delta k$$

$$\text{Como } \Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2},$$

$$\Downarrow$$
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Esta é a relação de incerteza de Heisenberg para a posição e o momento (coordenada x), uma dentre um conjunto de desigualdades similares conhecidas coletivamente como o princípio da incerteza de Heisenberg.

Uma consequência dramática deste princípio é que uma partícula confinada nunca pode estar em repouso: isto implicaria em se ter $p=0$ exatamente, ou $\Delta p=0$, o que viola o princípio da incerteza. Portanto, a partícula deve ter uma energia cinética, que pode ser estimada:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{a} \Rightarrow \langle p \rangle \sim \Delta p$$

$$\Downarrow$$
$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

chamada de energia de ponto zero.

Exemplos:

1. Sabe-se que um elétron está confinado a um intervalo de largura $a \approx 0,1 \text{ nm}$ (o raio de um átomo pequeno). Qual a incerteza mínima em sua velocidade consistente com esta deformação?

$$\Delta x \approx \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx \frac{\hbar}{a}$$

$$\text{Mas } v = \frac{p}{m} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m} > \frac{\hbar}{am}$$

$$\Delta v \geq \frac{\hbar c^2}{amc^2} \approx \frac{200 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{(0,1 \text{ nm}) \times (0,5 \times 10^6 \text{ eV})} \approx \frac{c}{250} \approx 10^6 \text{ m/s}$$

2. Qual a energia cinética mínima deste elétron?

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &\geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{(\hbar c)^2}{2(mc^2)a^2} = \\ &= \frac{(200 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{2 \times 0,5 \times 10^6 \text{ eV} \times (0,1 \text{ nm})^2} = 4 \text{ eV} \end{aligned}$$

Este valor mínimo é consistente com a energia cinética do elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio (13,6 eV)

Em 3 dimensões, temos desigualdades correspondentes,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

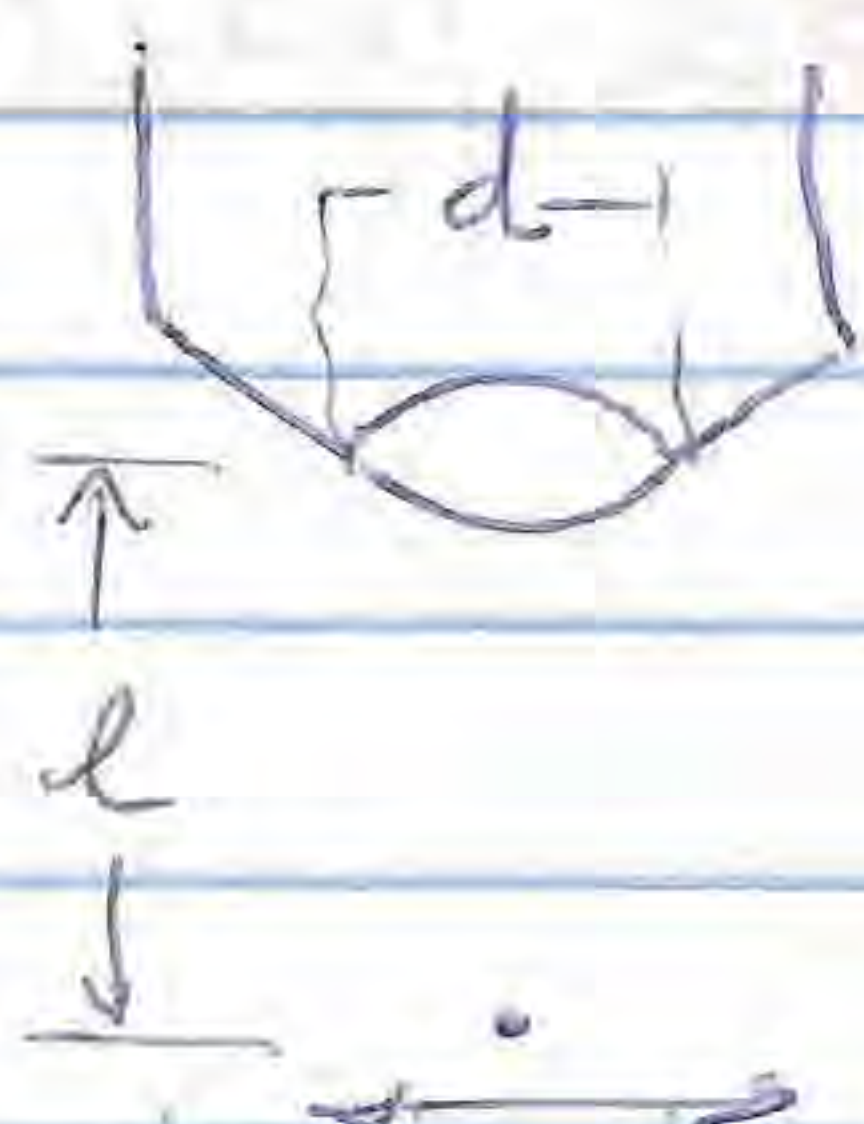
Microscópio de Heisenberg

O princípio da incerteza pode ser ilustrado por várias experiências ficcionais, e a mais conhecida delas será aqui descrita.

Vamos tentar violar o princípio da incerteza montando uma experiência que possa medir x e p com precisão maior (incertezas menores) que a permitida pelo princípio. Ela consiste em observar a posição x de uma partícula por um microscópio. Este tem sua resolução limitada pela difração da luz: a resolução angular $\theta_{\min}$, o ângulo de visão mínimo que permite a distinção entre 2 pontos, é dado pelo critério de Rayleigh:

$$\theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{d}$$

onde λ é o comprimento de onda da luz utilizada e d é o diâmetro da lente objetiva.



$$\Delta x = l \theta_{\min}$$



$$\text{ângulo} \approx \frac{d}{l}$$

Portanto, se a partícula está a uma distância l da lente, a incerteza mínima em x é

$$\Delta x \approx l \theta_{\min} \approx \frac{l \lambda}{d}$$

Em princípio, podemos fazer Δx tão pequeno quanto quisermos, se usarmos luz de pequeno λ .

De fato, conseguir medir Δx arbitrariamente pequeno não viola, de per si, o princípio da incerteza. Mas que consequência isto traz para a incerteza no momento da partícula?

Para observar a partícula, é necessário que pelo menos 1 foton seja por ela espalhado, e este processo muda o momento da partícula. Não temos como saber qual foi a trajetória do foton - por exemplo, entre as 2 representadas - já que a lente faz qualquer trajetória convergir para o mesmo ponto imagem. Logo, o ângulo de incidência do foton sobre a lente tem incerteza $\approx \frac{d}{l}$, o que significa que a incerteza na componente x do momento do foton é $p_x \frac{d}{l}$, que é a mesma incerteza do momento da partícula:

$$\Delta p_x \approx p_x \frac{d}{l} = \frac{h}{\lambda} \frac{d}{l} = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

O princípio da incerteza é um resultado completamente geral, devido à dualidade onda-partícula da natureza. Devo enfatizar que a análise do microscópio de Heisenberg serve apenas para ilustrar o aparecimento inevitável do princípio da incerteza no contexto de uma experiência em particular, e não é uma demonstração deste resultado geral.

6.9 A relação de incerteza para tempo e energia

Assim como $\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$ implica em $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, a relação $\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$ vai implicar numa relação correspondente para tempo e energia - basta multiplicar os 2 lados por $\hbar$ para obter

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

ΔE é a incerteza na energia da partícula: uma partícula quântica não tem, em geral, energia bem definida, e a medida desta energia resulta em valores numa faixa de $\pm \Delta E$ em torno de uma certa média, determinada pelo estado (função de onda) da partícula. Isto é fácil de entender, mas o significado de Δt é algo mais sutil.

1 / 1

Lembre de onde ele surgiu na desigualdade $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{1}{2}$: considerámo-lo um pulso de onda como função de t numa posição x fixada. O intervalo Δt caracteriza o tempo gasto pelo pulso para atravessar aquela posição x . Portanto, Δt caracteriza o intervalo durante o qual a partícula quântica pode ser encontrada na posição x . Pela relação de incerteza, se Δt for pequeno, a partícula deve ter uma grande incerteza ΔE em sua energia, e vice-versa.

Se uma partícula tem energia bem definida, $\Delta E = 0$, e Δt tem que divergir (ser infinito). Isto é, uma partícula quântica com energia bem definida fica localizada no mesmo estado (na mesma região) para sempre! Estes estados são os análogos quânticos das órbitas estacionárias de Bohr, e são chamados de estados estacionários.

Se um sistema quântico não permanecer no mesmo estado para sempre, Δt será finito ($> 0, \neq \infty$) e, portanto, $\Delta E \neq 0$. Por exemplo, um estado instável de um átomo ou um núcleo vive ~~para~~ durante um tempo Δt finito,

depois do qual ele decai pela emissão de uma partícula (elétron, fóton, α). Isto significa que a energia de um estado instável tem uma incerteza de, no mínimo,

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t}$$

Como a energia deste estado instável não é bem definida, o mesmo será verdade para a energia da partícula ejetada. Em muitos casos é possível medir tanto a faixa de energias com que a partícula é ejetada e o tempo de vida do estado Δt , e com isto confirmar a relação de incerteza. Em outras aplicações mede-se ΔE ou Δt , e infere-se o valor da outra pelo princípio da incerteza.

Atualmente usa-se as frequências de fótons emitidos em transições atômicas como padrões para a definição e calibração de frequência e tempo. Por causa do princípio da incerteza, a frequência de um destes fótons tem incerteza dada por

$$\Delta \omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \approx \frac{1}{2\Delta t} \quad \text{onde } \Delta t \text{ é o tempo de}$$

vida do estado excitado emissor.

É, portanto, importante escolher estados atômicos com tempos de vida Δt

muito longas para serem usadas como
padrões.

de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material

de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material

de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material

de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material
de uma porção de material

Exemplos

1. Muitos estados atômicos excitados são instáveis e decaem por emissão de 1 fóton num tempo da ordem de $\Delta t \approx 10^{-8} \text{ s}$. Qual a incerteza mínima da energia de um destes estados?

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar c}{2c\Delta t} \approx \frac{200 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2 \times 3 \times 10^{17} \text{ nm/s} \times 10^{-8} \text{ s}} \\ \approx 3 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

Como a escala típica de energias atômicas é de alguns eV, esta incerteza é muito pequena. No entanto, o alargamento que ela provoca no espectro de emissão é facilmente mensurável com um espectrômetro moderno.